

旋成面叶栅气动反命题的新解法 (II)

上海机械学院 戴 韧* * 上海工业大学 刘高联

【摘要】 本文利用映象平面 $\xi\eta$ 的特点, 将旋成面叶栅气动正命题的微分—积分解法与叶型修正的“喷气模型”结合, 建立了一种适用于旋成面叶栅气动反命题的新解法。叶片表面给定的气动参数分布作为反命题的边界条件, 在求解过程中直接得到满足。通过对一例实际透平叶型的计算验证了本文解法的可靠性和实用性。

关键词: 叶栅 反命题 映象平面 喷气模型

1 前 言

旋成面叶栅的各类气动问题可分为两大类。一是流场分析计算, 即正命题求解。二是设计计算, 包括反命题、杂交命题和优化命题的求解。由于反命题求解的复杂性以及理论上不完善, 迄今为止 95% 以上的文献是只涉及正命题的。随着透平机械性能的提高, 对叶型气动性能的要求亦日益显著, 相应地反命题研究更为重要。目前反命题的研究基本是沿 3 条途径进行^[1]: (1) 通用映象平面法。通过平面映象, 将未知边界的物理域映射为规则的求解域 $\xi\psi$, 以叶型角坐标 φ 为方程主变量, 迭代叶型表面规定条件获得叶型。(2) 基于变分原理的方法。该方法应用变域变分的工具, 构造出反命题和杂交命题的变分原理, 适应各种不同边界条件。(3) 正命题迭代反命题方法。以正命题反复迭代, 并结合流线插值等局部修正手段计算反命题。考虑上述 3 种反命题算法的计算结果后发现, 分别程度不同地存在以下问题: (1) 反命题提法与构成不完善, 是试凑性的。(2) 对初始叶型的依赖性较强。(3) 对前后缘处理不完善, 特别是在映象平面 $\xi\psi$ 中, 映射出现多值现象。

针对上述 3 个问题, 本文在文献 [2] 建立的旋成面叶栅反命题的映象平面 $\xi\eta$ 解法的理论基础之上, 提出相应地数值解法, 主要解决: (1) 叶面边界采用第 2 类边界条件, 构成完整准确的反命题。(2) 应用叶片表面“喷气模型”进行叶型修正, 降低算法对初始叶型的要求。

2 映象平面上的气动方程组

现考察以定角速度 ω 旋转的转轮内无粘、可压缩完全气体的绝热相对定常亚声速流动。假设来流的广义滞止焓和熵都是均匀的, 则沿旋成面绝对运动无旋。引入如下映射^[2]:

$$\xi = 1, \quad \eta = \eta_0 + (\varphi - \varphi_0) K_0 \delta \rho$$

其中: $K_0 = \eta_0 - \eta$ ($=$ 选定常数)。在映象平面 $\xi\eta$ 中 (图 1), 气动方程组表示为:

$$\oint \left[\operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\sec^2 \gamma}{H \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] d\xi + \left[H \eta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] d\eta \bigg/ (\pi \overline{\rho}) = 2\omega \Delta \eta \int_{ab}^H \eta \sin \alpha d\xi \quad (1)$$

$$\partial\psi/\partial\xi = \tau\bar{\rho}(\Lambda\tg\gamma - \Lambda\varphi) \quad , \quad \partial\psi/\partial\eta = \tau\bar{H}\eta\Lambda_i \quad (2)$$

$$\bar{\rho} = [1 - (\Lambda^2 - \Lambda_i^2)/(2m)]^m \quad (3)$$

其中

$$m = 1/(k - 1), H\eta = r \cdot \delta\varphi/K \quad (4)$$

式 (1) ~ (4) 共 4 式, 其中含有 5 个未知量 ψ , $\bar{\rho}$, $\tg\gamma$, $H\eta$, Λ , 需要补充一个关于 $\tg\gamma$ 的方程式

$$\tg\gamma = (rd\varphi/dl)_{\eta=c} = \tg\gamma_s + (r\eta/K_o)d\delta\varphi/d\xi \quad (5)$$

这样就构成了映象平面 $\xi\eta$ 上关于气动反命题的封闭方程组^[2]。

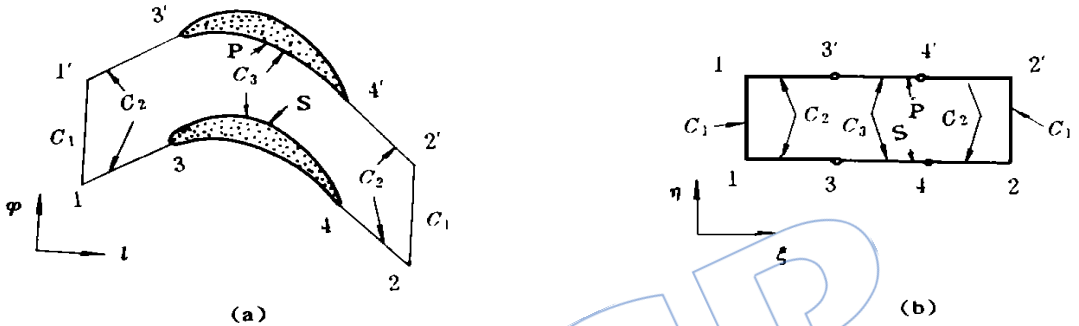


图 1 旋成面上的叶栅流及其映象

反命题的边界条件: 在 C_1 上给定 $\Lambda\varphi = [\Lambda\varphi(\varphi)]_{pr}$; 在 C_2 上必须满足周期性条件 $\psi(l, \varphi \pm k\Delta\varphi) = \psi(l, \varphi \pm k\Delta\psi)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$); 在 C_3 上给定 $\partial\psi/\partial\eta = (\bar{\rho}\Lambda)_i$, ($i = s, p$)。 $\vec{n}$ 为叶面外法线方向, Λ 为表面速度。

3 反命题的解法

根据旋成面叶栅气动反命题的提法^[2], 规定 s 面和 p 面的流动条件, 一般是已知速度分布, 目的是寻找满足该分布要求的叶型。考察方程式 (1) ~ (5), 反命题与正命题的差别在于: 正命题中由于叶型已知, $H\eta$ 和 $\tg\gamma$ 是已知的, 求解式 (1) ~ (5) 即可获得流场分布; 而反命题中叶型未知, 所以 $H\eta$ 和 $\tg\gamma$ 的变化反映了叶面流速的变化。因此在正命题的基础上, 再加上一个根据已知流场修正叶型的过程, 即构成反命题的解法。

3.1 离散化及数值解法

反命题求解的主要方程是式 (1), 该式的基础是无旋流动条件 $(\nabla \times \vec{C})_n = 0$ 。在数值积分离散式 (1) 时, 网格的划分和积分单元的选择都应满足该条件的要求, 为此选择了特殊的积分单元形式和相应的 $\xi\eta$ 平面上网格划分方法 (图 2)。如图 2b 所示, 除边界点外, 对计算域中任一点 (i, j) 选择 12341 封闭单元作为积分单元。这样的积分单元有 2 个优点: (1) 环量积分的数值误差最小。(2) 沿 j 方向形成三对角矩阵, 易于线松弛迭代解, 计算时间大为缩短。

方程式 (1) 中含有单变量和多变量的积分, 可用广义辛普生公式求数值积分^[4]。对每一个单元, 数值积分后经整理可得下式:

$$E_j^{(1)}\psi_{j-1} + E_j^{(2)}\psi_j + E_j^{(3)}\psi_{j+1} = F_j \quad (6)$$

其中 $E_j^{(1)}$ 、 $E_j^{(2)}$ 、 $E_j^{(3)}$ 和 F_j 是由 $\bar{\rho}$, τ , $\tg\gamma$, ξ , η 和 ψ 等组成的系数。沿 j 向求解式 (6), 再沿 i 向推进逐站求解, 即获得整个流场 ψ 的分布。以式 (3) 计算 $\bar{\rho}$ 分布, ψ , $\bar{\rho}$ 交替迭代直至收敛。

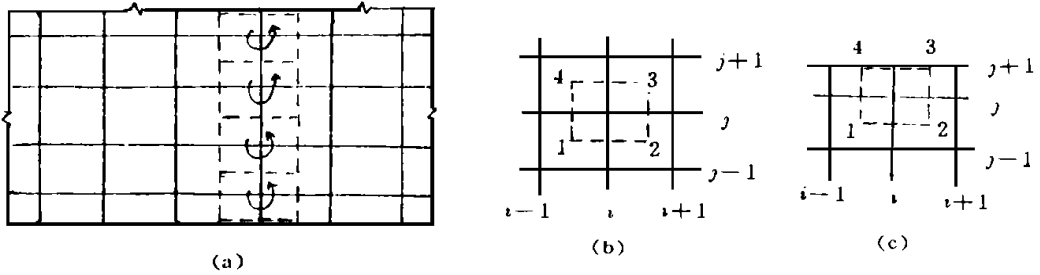


图2 积分单元与网格划分

3.2 叶型的修正

正命题求解时, C_3 边界上是第一类边界条件, 而在反命题中, 计算域 C_3 边界上是第二类边界条件。当叶型与给定的速度分布不匹配时, 在 C_3 边界上不可能同时给速度分布和表面滑移条件作为边界条件, 否则问题是无解的。因此为满足叶片表面速度分布的要求而对叶型进行修正时必须将 C_3 边界作为允许渗流的边界, 相应地在 C_3 上存在速度法向分量。这个法向速度将用于计算叶片型线的法向位移量, 从而获得对叶型的修正。 C_3 边界上的法向速度 Λ_n 在正命题计算中是不存在的。在正命题计算收敛以后, 由叶片表面的特征相容关系式^[4], Λ_n 表示为:

$$\Lambda_n = (\bar{p} - \bar{p}_{req}) / (k\bar{p}\bar{\rho})^{1/2} \quad (7)$$

显然叶型修正至满足表面速度分布的要求时, Λ_n 自然为零。根据 Λ_n 在叶面上建立一个“喷气模型”, 由初始叶型计算出新的流线位置作为新叶型, 此时初始叶型已不再是流线了。如图3所示, 在节点 i 与 $i-1$ 之间建立流量平衡关系式:

$$d(\bar{\rho}\Lambda_n \cdot \Delta n) = \bar{\rho}\Lambda_n ds \quad (8)$$

经差分离散:

$$(\Delta n \bar{\rho} \Lambda_n)_i = (\Delta n \bar{\rho} \Lambda_n)_{i-1} + \Delta s [(\bar{\rho} \Lambda_n)_{i-1} + (\bar{\rho} \Lambda_n)_i] / 2 \quad (9)$$

如果 $(\Delta n)_{i-1}$ 已知, 则由式 (9) 可以计算出 $(\Delta n)_i$, 叶型修正由前缘滞止点开始, 并设定该点 $(\Delta n)_{st} = 0$ 。对 S 面和 p 面分别应用式 (9) 即可获得新的 S 、 p 面型线, 作为下一轮正命题计算的初始叶型。

4 算例及其分析

为考核本文叶型修正模型及反命题算法的实用性及可靠性, 选择一个已知表面速度分布的 NASA 透平静叶平均截面的叶型^[5]作为算例进行考核。图4表示初始叶型和修正后叶型表面速度分布与给定速度分布的比较。经50次叶型修正后表面速度分布基本达到输入条件的要求, 只是在前缘附近误差明显一些。误差的原因是用 H 型网格计算, 前缘附近难算准, 如果前缘附近结合 C 型网格, 计算精度会有很大改善。

图5表示计算叶型, 初始叶型和实际叶型的比较, 与速度分布的比较相对应, 叶型基本

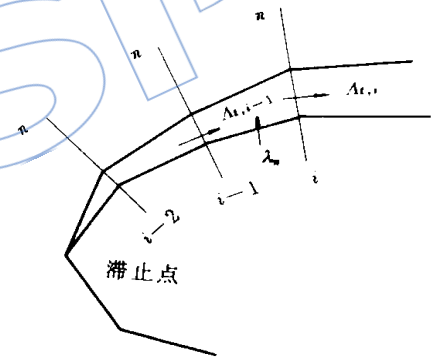


图3 叶型修正

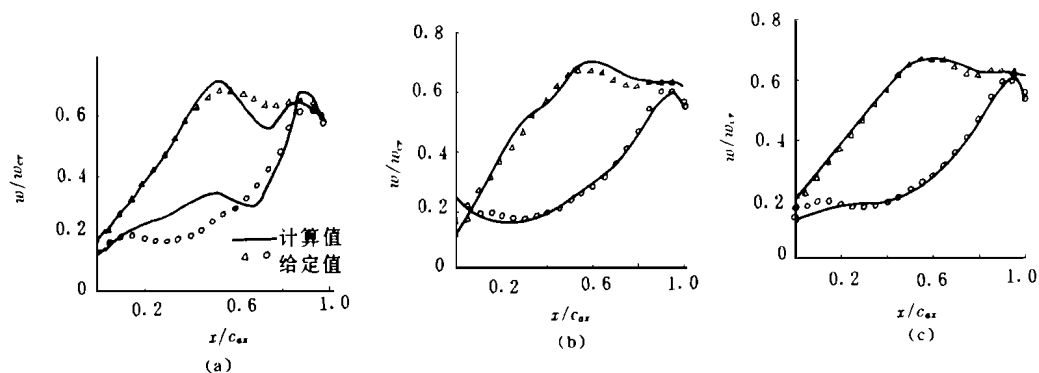


图 4 速度分布与比较

吻合, 但前缘附近 p 面型线略有差距, 这是前缘附近流场计算的误差造成设计误差。值得一提的是初始叶型是根据 Staniz 方法^[6]计算得到的, 无附加处理措施。在实际计算中也发现, 同时要满足 S 、 p 面输入条件的要求是困难的, 必须在现有叶型修正模型的基础上, 进一步建立 S 、 p 面的关联式, 才能有效地缩短计算时间, 提高设计效率。

上述算例说明, 在映象平面 $\xi\eta$ 上, 应用正命题结合表面“喷气模型”对叶型进行修正的反命题算法是实用可行的。叶面给定的速度分布可以通过逐步修正叶型来达到, 而且方法对初始叶型除要求合理的叶厚分布和光滑型线外, 并无其它特殊要求。本文算法的另一特点是正反命题的计算是在同一程序中完成的, 获得叶型的同时也得到相应的流场分布, 是正反命题 (包括杂交命题) 的统一算法。

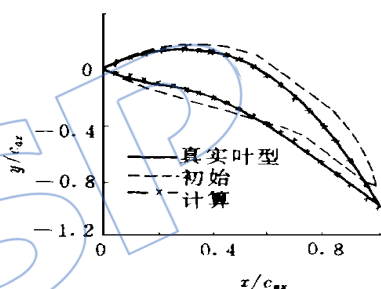


图 5 叶型比较

参 考 文 献

- 1 Liu G L. Research on Inverse, Hybrid and Optimization Problems in Engineering Science with Emphasis on Turbomachine Aerodynamics. Review of Chinese Advance, Proceeding ICIDES-III ed G. S. Dulikravich, Washington D. C. Oct 23 - 25, 1991
- 2 刘高联. 旋成面叶栅一些杂交气动命题的新解法 (I). 工程热物理学报, 1986, 5 (1)
- 3 哈尔滨汽轮机厂研究所. 任意回转面叶栅气动计算和设计. 力学, 2, 1977
- 4 Leonard O, V and den Braemussche R A. Design Method for Subsonic and Transonic Cascade with prescribed Mach Number Distribution. ASME Journal of Turbomachinery, 1992, 114
- 5 张耀科, 沈孟育. 平面叶栅跨声流的数值试验. 计算数学, 1978, 11 (4)
- 6 Staniz J D.. NACA TN 2421 (1951), TN 2408 (1951)

(责任编辑 魏星禄)